ĐỖ ĐỨC THÁI

ÔN LUYỆN THI ĐẠI HỌC

MÔN TOÁN

ĐẠI SỐ

- SOẠN THEO HƯỚNG CẢI TIẾN RA ĐỀ THI CỦA BỘ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
- NHỮNG BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH THEO TỪNG CHỦ ĐỀ
- DÙNG CHO ÔN LUYỆN THI ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG TỐT NGHIỆP THPT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS.TSKH. ĐỖ ĐỨC THÁI

ÔN LUYỆN THI ĐẠI HỌC
MÔN TOÁN
ĐẠI SỐ

* *Soạn theo hướng cải tiến ra đề thi của Bộ Giáo dục - Đào tạo*
* *Những bài toán điển hình theo từng chủ đề*
* *Dùng cho ôn luyện thi Đại học – Cao đẳng và tốt nghiệp THPT*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc **NGUYỄN VĂN THỎA**

Tổng biên tập **NGUYỄN THIỆN GIÁP**

Biên tập:

HẢI ĐĂNG

Sửa bản in:

CHÍ HIẾU

Trình bày bìa

HỒNG HẠNH

ÔN LUYỆN THI ĐẠI HỌC MÔN TOÁN - ĐẠI SỐ

Mã số: 01.33-ĐH.2003

In 1500 cuốn, tại Công ty In và Văn hoá phẩm Bộ VHTT.

Số giấy phép xuất bản: 177/120/CXB. Số trích ngang: 69 KH/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2003.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

*Hiện nay có khá nhiều loại sách do các tác giả khác nhau biên soạn nhằm giúp cho bạn đọc có tài liệu ôn thi môn Toán. Nhiều bạn đọc mong muốn khi ôn luyện để chuẩn bị thi trong tay mình có một cuốn sách đáp ứng yêu cầu các kỳ thi: hết cấp THPT, thi vào Đại học, Cao đẳng... Đáp ứng yêu cầu đó, chúng tôi biên soạn bộ sách: "**Ôn luyện thi Đại học môn Toán**" dựa trên kinh nghiệm luyện thi Đại học qua nhiều năm và đặc biệt dựa theo hướng cải tiến ra đề thi của Bộ Giáo dục - Đào tạo kể từ năm 2002 trở đi.*

*Bộ sách "**Ôn luyện thi Đại học môn Toán**" gồm ba cuốn: Đại số, Giải tích và Hình học – Lượng giác. Ở mỗi cuốn sách trên đều được chọn lọc những nội dung theo các chương (chủ đề) sát với kiến thức cơ bản của chương trình trung học phổ thông.*

Các ví dụ là những bài tập hay, chứa hàm lượng kiến thức phong phú nhằm rèn luyện kỹ năng giải toán sơ cấp một cách triệt để cho mọi trường hợp có thể, giúp bạn đọc tích luỹ cho mình được kinh nghiệm giải những thể loại tương tự.

Tác giả hy vọng bộ sách này sẽ giúp bạn đọc ôn và luyện thi đạt kết quả theo ý muốn.

Tác giả

CHƯƠNG 1

TAM THỨC BẬC HAI

§1. DẤU TAM THỨC BẬC 2

I. TAM THỨC BẬC 2 KHÔNG ĐỔI DẤU TRÊN TOÀN TRỤC SỐ

Định lý: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Khi đó: $f(x) > 0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

$$f(x) \geq 0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$f(x) < 0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$f(x) \leq 0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

VÍ DỤ 1

Tìm a để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

$$f(x) = (a-1)x^2 + 2x + a + 1 > 0 \qquad (*)$$

LỜI GIẢI

- Nếu $a = 1$: (*) trở thành $2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ (loại)
- Nếu $a \neq 1$: (*) nghiệm đúng $\forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 2 - a^2 < 0 \\ a - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 < 2 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > \sqrt{2}$$

Kết luận: (*) nghiệm đúng $\forall x \Leftrightarrow a > \sqrt{2}$

VÍ DỤ 2

Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{x^2+1} \quad x \in \mathbb{R}$

Hãy tìm a, b để: $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -1; \max\limits_{\mathbb{R}} y = 4$.

LỜI GIẢI

- $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} y(x) \geq -1 \ \forall x \\ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ \ y(x_0) = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x^2+1} \geq -1 \ \forall x \\ \exists x_0 : \dfrac{ax_0+b}{x_0^2+1} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+b+1 \geq 0 \ \ \forall x \\ \exists x_0 : x_0^2 + ax_0 + b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4(b+1) \leq 0 \\ \text{phương trình } x^2 + ax + b + 1 = 0 \text{ có nghiệm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4(b+1) \leq 0 \\ \Delta = a^2 - 4(b+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 - 4(b+1) = 0 \ (1)$$

- $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y(x) \leq 4 \ \forall x \\ \exists x_1 : \ y(x_1) = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x^2+1} \leq 4 \ \forall x \\ \exists x_1 : \dfrac{ax_1+b}{x_1^2+1} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - ax - b + 4 \geq 0 \quad \forall x \\ \exists x_1 : 4x_1^2 - ax_1 - b + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 16(-b+4) \leq 0 \\ \text{phương trình } 4x^2 - ax - b + 4 = 0 \text{ có nghiệm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 16(-b + 4) = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} a^2 - 4b - 4 = 0 \\ a^2 + 16b - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = \pm 4 \end{cases}$$

Kết luận: Hàm $\left[\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{4x+3}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R} \\ y_2 = \dfrac{-4x+3}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$.

II. TAM THỨC BẬC 2 KHÔNG ĐỔI DẤU TRÊN NỬA TRỤC SỐ

Bài toán tổng quát:

Tìm điều kiện để $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ *trên* $(\alpha, +\infty)$ *hoặc* $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ *trên* $(-\infty, \alpha)$.

VÍ DỤ 3

Tìm m sao cho phương trình sau luôn nghiệm đúng $\forall x$

$$9^x - 2(m+1)\,3^x - (2m+3) > 0 \quad (*)$$

LỜI GIẢI

Đặt $3^x = t > 0$

$(*) \Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t - (2m+3) > 0 \qquad (**)$

$(*)$ nghiệm đúng $\forall x \Leftrightarrow (**)$ nghiệm đúng $\forall t > 0$

$\Leftrightarrow f(t) > 0 \quad \forall t > 0$

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 + (2m+3) = (m+2)^2$

+ Xét $m = -2$, $f(t) = (t + 1)^2 > 0 \quad \forall t > 0$

+ Xét $m \neq -2 \Rightarrow \Delta't > 0 \Rightarrow f(t)$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1 < t_2$

Do đó $f(t) > 0\ \forall t > 0 \Leftrightarrow t_1 < t_2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = -(2m+3) \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} = m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{-3}{2} \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{-3}{2} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Kết luận: (*) Nghiệm đúng $\forall x \Leftrightarrow m \leq \dfrac{-3}{2}$.

III. DẤU TAM THỨC BẬC 2 TRÊN MỘT KHOẢNG (KHÔNG ĐỔI)

VÍ DỤ 1

Tìm m để bất phương trình đúng $\forall x$:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x\cos x \geq 0 \qquad (1)$$

LỜI GIẢI

(1) $\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - 2m\sin x\cos x \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{4}.2\sin^2 2x - m\sin 2x \geq 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 2m\sin 2x - 2 \leq 0$

Đặt $\sin 2x = t$ ($|t| \leq 1$)

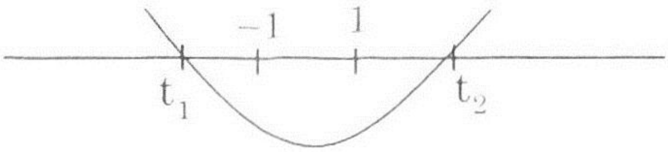
Thay vào ta có:

(1) $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2mt - 2 \leq 0$

Do đó (1) đúng $\forall x \Leftrightarrow f(t) \leq 0$ trên $[-1; 1]$

$\Delta' = m^2 + 2 > 0$

$\Rightarrow f(t)$ luôn có 2 nghiệm $t_1 < t_2$



Vì thế $f(t) \le 0 \big/_{[-1;1]} \Leftrightarrow t_1 \le -1 < 1 \le t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = -2m - 1 \le 0 \\ f(1) = 2m - 1 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$$

Kết luận: (1) Nghiệm đúng với $\forall x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$

VÍ DỤ 2

Cho 2 bất phương trình:

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + \log_{\frac{1}{4}} x^2 < 0 \qquad (1)$$

và $f(x) = x^2 + mx + m^2 + 6m < 0 \qquad (2)$

Hãy tìm m sao cho mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2).

LỜI GIẢI

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} x^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x < 0 \end{cases}$$